



## Transitions dynamiques -changement des lois d'occurrence a des instants discrets

Yves Dutuit, Jean-Pierre Signoret, Philippe Thomas

### ► To cite this version:

Yves Dutuit, Jean-Pierre Signoret, Philippe Thomas. Transitions dynamiques -changement des lois d'occurrence a des instants discrets. Congrès Lambda Mu 21 “ Maîtrise des risques et transformation numérique : opportunités et menaces ”, Oct 2018, Reims, France. hal-02075058

**HAL Id: hal-02075058**

**<https://hal.science/hal-02075058>**

Submitted on 21 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# TRANSITIONS DYNAMIQUES – CHANGEMENT DES LOIS D'OCCURRENCE A DES INSTANTS DISCRETS –

## DYNAMIC TRANSITIONS – CHANGING EVENT OCCURRENCE LAWS AT DISCRETE INSTANTS –

**DUTUIT Yves**

Professeur retraité  
Université de Bordeaux  
38 rue du Prieuré  
33170 Gradignan, France  
[yves.dutuit@sfr.fr](mailto:yves.dutuit@sfr.fr)

**SIGNORET Jean-Pierre**

TPA (TOTAL Professeurs  
Associés)  
2 route de Garlin  
64160 Sedzère, France  
[j-p.signoret@orange.fr](mailto:j-p.signoret@orange.fr)

**THOMAS Philippe**

SATODEV  
25 rue Marcel Issartier  
33700 Mérignac, France  
[philippe.thomas@satodev.fr](mailto:philippe.thomas@satodev.fr)

### Résumé

Pour les systèmes dynamiques, il arrive souvent que la loi d'occurrence d'un événement A (ex. la défaillance d'un circuit électronique) soit modifiée par l'occurrence d'un événement extérieur B (ex. la défaillance de la climatisation). Lors d'un calcul par simulation de Monte Carlo, cela implique que l'instant d'occurrence de A soit réactualisé quand B se produit. Le présent article se propose de prolonger et généraliser les procédures proposées dans l'article présenté au LM20 (Dutuit Y. *et al.*, 2016) en introduisant de nouvelles procédures et en les fusionnant dans un modèle unifié qui évite d'avoir à faire un nouveau tirage au hasard au moment de l'occurrence de B. Tout au long de cet article, des lois de Weibull sont utilisées, ce qui permet de traiter la loi exponentielle comme cas particulier.

### Summary

For Dynamic systems it often arises that the occurrence law of a given event A (e.g. the failure of an electronic device) is modified by the occurrence of another event B (e.g. the air conditioning failure). When Monte Carlo simulation is implemented this implies to update the instant of occurrence of A when B is occurring. The present article aims to extend and generalize the procedures proposed in the article presented in the LM20 (Dutuit Y. *et al.*, 2016) by introducing new procedures and merging them within a single model avoiding to perform a new random draw when B is occurring. In this paper Weibull laws are implemented and this allows to handle the exponential laws as particular cases.

## 1. Introduction et contexte

Le contexte est celui des transitions dynamiques et de leur utilisation en simulation de Monte Carlo. Cela correspond à la situation où l'instant d'occurrence d'un événement A est modifié, avant de s'être produit, par l'occurrence d'un autre événement B. L'exemple typique est celui de la défaillance d'un composant dont les conditions d'utilisation changent à un instant  $T$ . Avant cet instant  $T$ , la probabilité de défaillance est régie par une loi de probabilité  $f(t)$ , après cet instant, et si la défaillance n'a pas eu lieu avant,  $f(t)$  est remplacée par une autre loi de probabilité  $g(t)$ . Ce processus peut se renouveler plusieurs fois avant que la défaillance ne se produise effectivement et cela a été étudié dans l'article (Dutuit Y. *et al.*, 2016) présenté en 2016 lors du LM20 dans le cas particulier de lois de Weibull de paramètres différents. Pour raccorder les lois au moment des changements de conditions, cet article propose plusieurs approches dont la *continuité temporelle* et la *continuité probabiliste* et le but du présent article est de les analyser afin de montrer comment elles peuvent être généralisées et unifiées dans une approche unique.

Un composant soumis à des conditions plus sévères que la normale entre deux instants  $T_1$  et  $T_2$  est utilisé comme exemple tout au long de cet article. La probabilité de défaillance du composant est régie par une loi de Weibull  $Wb_1$  de paramètres  $\lambda_1$  et  $\beta_1$  dans les intervalles  $[0, T_1]$  et  $[T_2, +\infty]$ , et par une loi de Weibull  $Wb_2$  de paramètres  $\lambda_2$  et  $\beta_2$  dans l'intervalle  $[T_1, T_2]$ . L'intérêt de la loi de Weibull est son caractère de généralité, sa facilité de manipulation analytique et son application à la loi exponentielle lorsque les facteurs  $\beta_1$  ou/et  $\beta_2$  sont égaux à 1. Cet exemple permet d'illustrer deux raccords aux instants  $T_1$  et  $T_2$  et suffit à démontrer la généralisation de l'approche à un nombre de changements supérieurs à deux.

## 2. Continuité probabiliste versus continuité temporelle

### 2.1 Principe

Le principe de la *continuité probabiliste* est illustrée sur la Figure 1 par un composant dont la probabilité de défaillance est régie par une loi de Weibull  $Wb_1$  de paramètres  $\lambda_1=10^{-4}$  et  $\beta_1=3$  dans les intervalles  $[0, T_1]$  et  $[T_2, +\infty]$ , et par une loi de Weibull  $Wb_2$  de paramètres  $\lambda_2=3.0 \cdot 10^{-4}$  et  $\beta_2=3$  dans l'intervalle  $[T_1, T_2]$ . Le paramètre  $\lambda_2 = 3 \times \lambda_1$  modélise des conditions plus sévères dans l'intervalle  $[T_1, T_2]$ . Dans cette approche, ce sont les fonctions de répartition qui se raccordent. Ceci implique, à  $T_1$ , l'égalité  $\exp(-\lambda_1 \cdot T_1^{\beta_1}) = \exp(-\lambda_2 T_1^{\beta_2})$ . Le décalage  $\Delta_2$  se calcule facilement à partir de l'égalité précédente et il en résulte que l'origine de la loi  $Wb_2$  est  $T_1 - \Delta_2$  et non pas  $t = 0$ . Ceci est illustré sur la Figure 1.

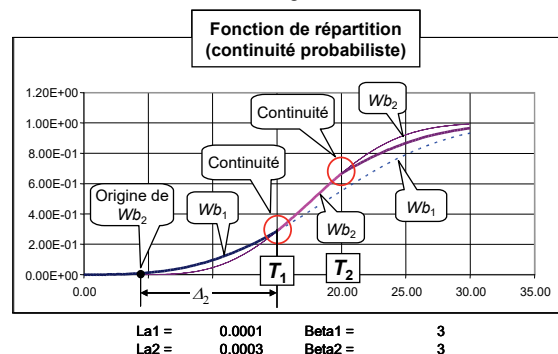


Figure 1 : Fonction de répartition pour la continuité probabiliste.

Le principe de la *continuité temporelle* est illustré sur la Figure 2 par un composant dont la probabilité de

défaillance est régie par les mêmes lois de Weibull  $Wb_1$  et  $Wb_2$  que pour l'exemple précédent. Dans ce cas, les changements de conditions à  $T_1$  et à  $T_2$  conservent l'origine,  $t = 0$ , des taux de défaillance relatifs aux lois  $Wb_1$  et  $Wb_2$ . Il en résulte un saut du taux de défaillance du composant à chaque changement de conditions. A l'instant  $T_1$  il saute de  $\lambda(T_1^-) = \lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot T_1^{\beta_1-1}$  à  $\lambda(T_1^+) = \lambda_2 \cdot \beta_2 \cdot T_1^{\beta_2-1}$ . Et à  $T_2$ , lorsque les conditions reviennent à la normale, il retrouve la courbe initiale relative à  $Wb_1$  en sautant de  $\lambda(T_2^-) = \lambda_2 \cdot \beta_2 \cdot T_2^{\beta_2-1}$  à  $\lambda(T_2^+) = \lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot T_2^{\beta_1-1}$ .

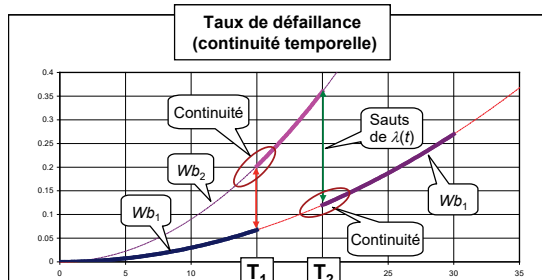


Figure 2 : Taux de défaillance pour la continuité temporelle.

Les conditions plus sévères sur  $[T_1, T_2]$  n'ont aucun impact sur le devenir du composant après  $T_2$ , qui continue à se comporter comme si rien ne s'était passé. Un exemple d'un tel comportement est celui d'un système comportant deux composants différents A et B et où A est remplacé par B pendant  $[T_1, T_2]$ , mais sans que A et B ne subissent de panne.

## 2.1 Comparaison des deux approches

Au vu de la Figure 1 et de la Figure 2 ci-dessus, les deux approches semblent très différentes mais cette impression peut être modifiée si on considère le taux de défaillance relatif à la *continuité probabiliste* (Figure 3) et la fonction de répartition relative à la *continuité temporelle* (Figure 5).

Dans le cas de la *continuité probabiliste*, à l'instant d'un changement de conditions à l'instant  $T_1$ , et comme cela est illustré sur la Figure 3, le taux de défaillance saute de  $\lambda^-(T_1) = \lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot T_1^{\beta_1-1}$  à  $\lambda(T_1^+) = \lambda_2 \cdot \beta_2 \cdot \Delta_2^{\beta_2-1}$ . Le comportement est donc similaire à celui observé dans le cas de la *continuité temporelle*. La différence est que l'origine des temps n'est plus 0 mais  $T_1 - \Delta_2$ .

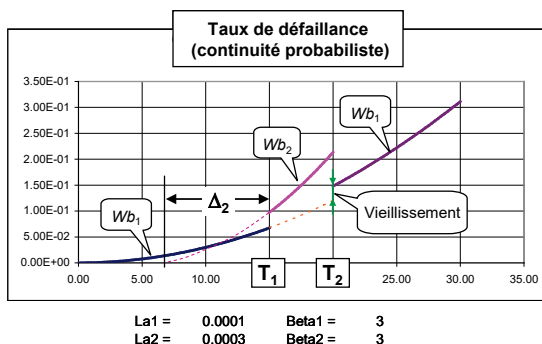


Figure 3 : Fonction de répartition pour la continuité probabiliste.

Lors du retour aux conditions normales à  $T_2$ , le taux de défaillance ne revient pas sur la courbe initiale et l'impact des conditions plus sévères sur  $[T_1, T_2]$  se traduit par un taux de défaillance plus élevé que si le changement à  $T_1$

n'avait pas eu lieu. Cela peut modéliser, par exemple, un dommage ou vieillissement plus rapide dû aux conditions plus sévères pendant  $[T_1, T_2]$ .

Pour établir la fonction de répartition relative à la continuité temporelle, il faut étudier le comportement de la fiabilité  $R(t)$  du composant correspondant.

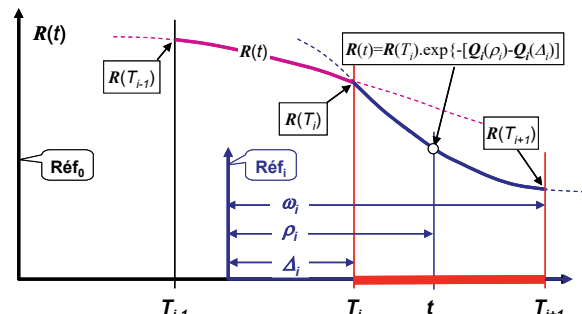


Figure 4 : Raccordement de la fiabilité à l'instant d'un changement de conditions.

La fiabilité dans l'intervalle  $i$  s'écrit

$$R(t) = R(T_i) \cdot \exp\left[-\int_{T_i}^t \lambda(u) du\right] \text{ où } R(T_i) \text{ représente la}$$

fiabilité sur l'intervalle  $[0, T_i]$ .

Lorsque la variable  $u$  varie de  $T_i$  à  $t$  dans le référentiel  $\text{Ref}_0$  relatif au temps courant, la variable  $v$  varie de  $\Delta_i$  à  $\rho_i$  dans le référentiel  $\text{Ref}_i$  relatif à l'intervalle  $i$  (voir Figure 4). Il en résulte :

$$R(t) = R(T_i) \cdot \exp\left[-\int_{T_i}^t \lambda(u) du\right] = R(T_i) \cdot \exp\left[-\int_{\Delta_i}^{\rho_i} \lambda_i(v) dv\right]$$

Si  $Q_i(v)$  est la primitive de  $\lambda_i(v)$  alors

$$\int_{\Delta_i}^{\rho_i} \lambda_i(v) dv = Q_i(\rho_i) - Q_i(\Delta_i)$$

Et finalement :

$$R(t) = R(T_i) \cdot \exp\{-[Q_i(\rho_i) - Q_i(\Delta_i)]\} = \frac{R(T_i)}{\exp[-Q_i(\Delta_i)]} \cdot \exp[-Q_i(\rho_i)]$$

où  $\rho_i$  est le temps courant dans le référentiel  $\text{Ref}_i$ .

$$\text{Ainsi, } R(T_{i+1}) = \frac{R(T_i)}{\exp[-Q_i(\Delta_i)]} \cdot \exp[-Q_i(\omega_i)]$$

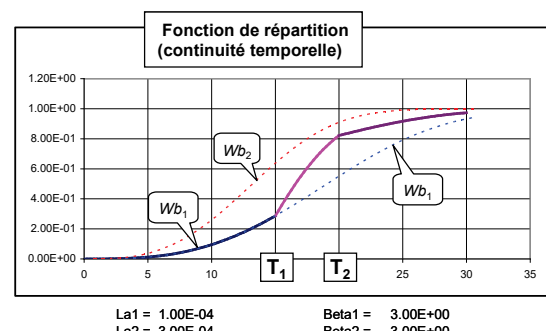


Figure 5 : Fonction de répartition pour la continuité temporelle.

Lors du changement de conditions ( $\rho_i = \Delta_i$ ),  $R(T_i)$  ne change pas et il en résulte que la fiabilité est continue aux changements de lois. Il en est de même de la défiabilité  $F(t) = 1 - R(t)$  qui est aussi la fonction de répartition du temps à la défaillance du composant modélisé. Ceci est valable dans tous les cas et en particulier pour la *continuité temporelle*, comme cela est illustré sur la Figure 5.

Donc la *continuité temporelle* est en fait un cas particulier de la *continuité probabiliste* et finalement les deux approches qui paraissent si différentes au début se ressemblent beaucoup : pour toutes les deux la fonction de répartition est continue et le taux de défaillance subit un saut à l'instant d'un changement des conditions d'utilisation.

Un exemple physique illustratif correspondant aux développements ci-dessus est celui d'une photocopieuse appartenant à un groupe de deux, une grosse et une petite. En temps normal, la charge s'équilibre entre les photocopieuses (2/3 pour la grosse et 1/3 pour la petite) mais lorsque la grosse tombe en panne, la charge de la petite est multipliée par trois. Lorsque la panne de la grosse est réparée, la charge revient à la normale pour la petite. Cependant, si on y regarde de plus près, aucun des deux modèles ci-dessus n'est complètement satisfaisant pour modéliser cet exemple :

- la continuité temporelle ne considère pas l'usure supplémentaire due à la charge triplée entre  $T_1$  et  $T_2$  alors que le modèle utilisé (loi de Weibull) est justement censé modéliser le vieillissement ;
- la continuité probabiliste modélise effectivement un vieillissement mais il n'y a pas réellement de lien entre le raccord des fonctions de répartition et l'augmentation physique de charge subie.

Cette constatation conduit à considérer une autre procédure de raccordement, comme cela est expliqué ci-après.

### 3. Continuité du taux de défaillance et vieillissement

Pour pallier les difficultés évoquées ci-dessus, une autre manière de raisonner est de considérer qu'au moment de la panne de la grosse photocopieuse, la petite se met à s'user (donc à vieillir) 3 fois plus vite que la normale puis revient à la vitesse d'usure normale quand la grosse photocopieuse est remise en service. Le vieillissement de la petite photocopieuse est donc multiplié par 3 dans l'intervalle  $[T_1, T_2]$ .

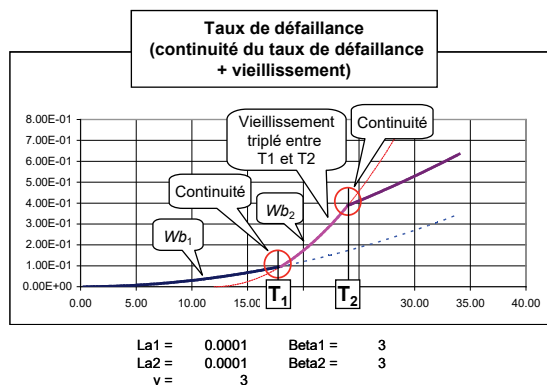


Figure 6 : Taux de défaillance pour la continuité du taux de défaillance avec vieillissement.

Dans ce cas, le taux de défaillance ne change pas brutalement aux changements de conditions d'utilisation, seule la vitesse à laquelle il augmente change. Si le vieillissement est multiplié par 3 dans l'intervalle  $[T_1, T_2]$ , cela signifie qu'au bout d'une durée  $\rho$  de cet intervalle le taux de défaillance est le même que pour une durée  $3 \cdot \rho$  en situation normale. C'est ce qui a été modélisé sur la Figure 6 où le taux de défaillance reste continu à l'instant  $T_1$ , augmente 3 fois plus vite que la normale entre  $T_1$  et  $T_2$  et revient à la vitesse normale à partir de  $T_2$ .

Plus généralement, pour un vieillissement multiplié par  $v$ , et pour une durée  $\rho$ , le taux de défaillance relatif à  $Wb_2$  peut

s'écrire  $\lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot (v \cdot \rho)^{\beta_1-1}$  soit  $\lambda_1 \cdot v^{\beta_1-1} \cdot \beta_1 \cdot \rho^{\beta_1-1}$ . Donc finalement les paramètres de  $Wb_2$  deviennent  $\lambda_2 = \lambda_1 \cdot v^{\beta_1-1}$  et  $\beta_2 = \beta_1$ .

Il en résulte que l'exemple ci-dessus est un cas particulier d'une approche plus générale : *continuité du taux de défaillances*. Dans cette approche, le taux de défaillance ne change pas à l'instant d'un changement de conditions mais sa vitesse de changement augmente ou diminue. Ainsi, le raccordement entre  $Wb_1$  et  $Wb_2$  à l'instant  $T_1$  se fait par l'égalité  $\lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot T_1^{\beta_1-1} = \lambda_2 \cdot \beta_2 \cdot \Delta_2^{\beta_2-1}$ . Le décalage  $\Delta_2$  correspondant de  $Wb_2$  se calcule facilement à partir de l'égalité précédente et  $T_1 - \Delta_2$  devient l'origine des temps pour  $Wb_2$ .

L'exemple illustré sur la Figure 6 correspond donc à l'approche par *continuité du taux de défaillance* avec des paramètres pour  $Wb_2$  égaux à  $\lambda_2 = 9.0 \cdot 10^{-4}$  et  $\beta_2 = 3$ .

La fonction de répartition correspondant au taux de défaillance de la Figure 6 est représentée sur la Figure 7. Cette fonction est, bien entendu, continue, ce qui l'apparente à la *continuité probabiliste* analysée au chapitre précédent.

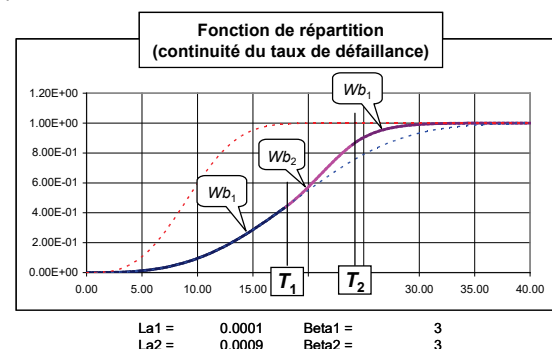


Figure 7 : Fonction de répartition pour la continuité du taux de défaillance.

### 4. Unification des différentes approches dans un cas général

Comme la fonction de répartition est continue dans tous les cas, l'approche par *continuité probabiliste* unifie tous les cas considérés.

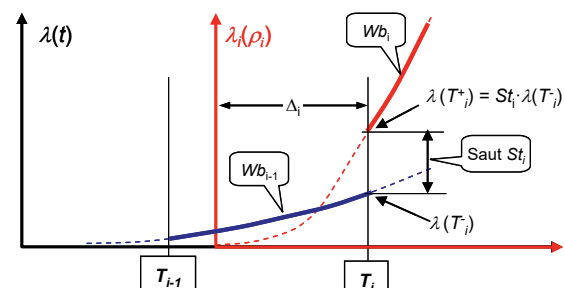


Figure 8 : Cas général de l'évolution du taux de défaillance lors d'un changement de conditions.

Pour les taux de défaillance, deux comportements sont observés : avec saut ou sans saut aux changements de conditions. En fait, ces deux cas n'en font qu'un si on considère que l'absence de saut est seulement un saut égal à zéro (ou un facteur multiplicatif de 1). La situation générale est donc la suivante : saut du taux de défaillance aux changements de conditions puis évolution selon une

loi donnée jusqu'au prochain changement. Ceci est illustré sur la Figure 8.

A l'instant  $T_i$ , le composant subit un  $i^{\text{ème}}$  changement de conditions et subit un choc qui multiplie son taux de défaillance par  $St_i$ . Ce saut s'apparente à un choc non léthal. Il en résulte que  $\lambda(T_i^+) \equiv St_i \cdot \lambda(T_i^-) \equiv \lambda_i(\Delta_i)$ . Une fois le saut effectué, le taux de défaillance évolue selon une loi  $Wb_i$  telle que  $\lambda_i \cdot \beta_i \cdot \Delta_i^{\beta_i-1} = \lambda(T_i^+) = St_i \cdot \lambda(T_i^-)$ . Le décalage  $\Delta_i$  se déduit facilement de cette formule.

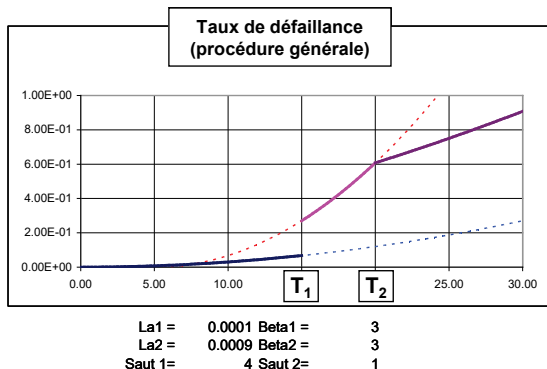


Figure 9 : Illustration de la procédure générale.

La Figure 9 illustre un exemple où le composant subit un choc à  $T_1$  qui multiplie instantanément son taux de défaillance par 4, puis à partir de ce point il vieillit 3 fois plus rapidement qu'auparavant. A l'instant  $T_2$ , les conditions reviennent normales, le taux de défaillance est continu mais son vieillissement redescend à 1.

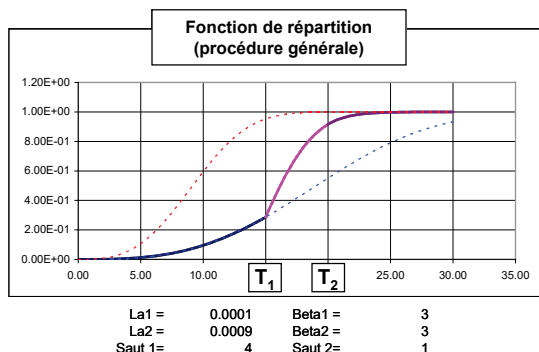


Figure 10 : Fonction de répartition liée à la Figure 9.

Comme cela est illustré sur la Figure 10 la fonction de répartition correspondante reste continue aux instants des changements de conditions.

## 5. Simulation des instants de défaillance

Après avoir donné un aperçu général de l'approche, il est nécessaire d'entrer un peu plus avant dans les calculs mathématiques pour aller plus loin.

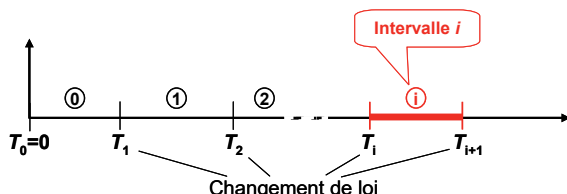


Figure 11 : Succession des intervalles où les lois sont différentes.

Avant que le composant tombe en panne, il peut subir un certain nombre de changements de conditions et il sera

supposé pour la suite qu'il a survécu jusqu'à atteindre l'intervalle  $i$  illustré sur la Figure 11. Il sera aussi supposé que la loi change au début de l'intervalle puis reste la même à l'intérieur de cet intervalle.

La Figure 12 définit les divers intervalles de temps utilisés dans le document. Elle permet de visualiser le référentiel relatif à la loi de Weibull relative à l'intervalle  $i$ . Dans ce référentiel, le taux de défaillance est égal à  $\lambda(t) \equiv \lambda_i(\rho_i)$  avec  $\rho_i = \Delta_i + t - T_i$ .

Au début de l'intervalle  $i$ ,  $\lambda(T_i^+) \equiv \lambda_i(\Delta_i)$  et à la fin de l'intervalle  $\lambda(T_{i+1}^-) \equiv \lambda_i(\omega_i)$  avec  $\omega_i = \Delta_i + T_{i+1} - T_i$ .

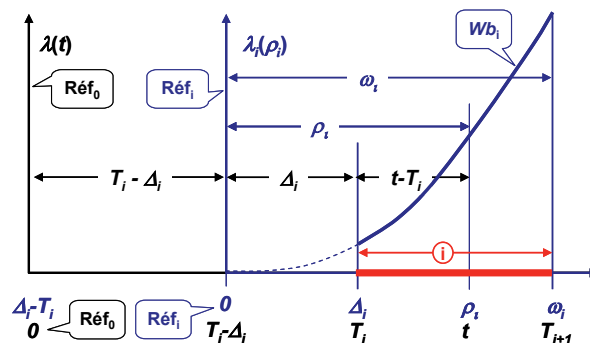


Figure 12 : Notation des temps dans l'intervalle  $i$ .

La Figure 13 illustre le principe de la réactualisation des instants de tirs lors d'une simulation de Monte Carlo. Au départ, un nombre au hasard  $z$  équiréparti entre 0 et 1 est généré. Il permet, par inversion de la fonction de répartition de la loi de défaillance (c'est-à-dire de la défiabilité du composant), de trouver à quel instant la défaillance va se produire dans cette simulation, par exemple  $\theta_{i-1}$  si le composant a survécu jusqu'à l'intervalle  $i-1$  (i.e.  $T_i > \theta_{i-1}$ ).

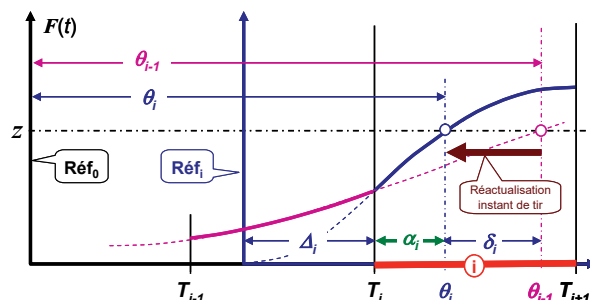


Figure 13 : Principe de la réactualisation des instants de tirs lors d'une simulation de Monte Carlo.

Si, avant que la défaillance ne se produise, les conditions changent à l'instant  $T_i$ , il faut alors réactualiser l'instant de défaillance qui devient  $\theta_i$  au lieu de  $\theta_{i-1}$ . Si aucun changement de condition n'intervient avant cet instant (i.e.  $T_{i+1} > \theta_i$ ), alors la défaillance se produira à cet instant  $\theta_i = T_i + \alpha_i$ . La valeur  $\alpha_i$  représente alors la durée qui reste à courir avant que la défaillance ne se produise.

Lors d'une simulation de Monte Carlo, le calcul de l'instant de panne est réalisé à l'aide du tir au hasard d'un nombre aléatoire  $z$  équiréparti entre 0 et 1 et de la fonction de répartition du temps à la défaillance (c'est-à-dire de la défiabilité) du composant considéré. Lorsque le nombre aléatoire  $z$  a été tiré au hasard, l'instant de la défaillance est calculé grâce au changement de variable  $z = F(\theta)$  et en calculant  $\theta = F^{-1}(z)$ . C'est ce qui est illustré sur la Figure 13.

La formule  $z = F(\theta)$  est équivalente à  $1 - z = R(\theta)$ . Mais si  $z$  est un nombre au hasard équiréparti entre 0 et 1,  $(1 - z)$  est aussi un nombre au hasard équiréparti entre 0 et 1. Donc finalement le calcul peut se faire par le changement de variable  $z = R(\theta)$  et  $\theta = R^{-1}(z)$ . C'est ce qui est utilisé pour le développement de l'algorithme développé ci-après pour le cas de la loi de Weibull.

### 1. Intervalle 0

$$T_0 = 0 \Rightarrow R(T_0) = 1$$

$$\Delta_0 = 0 \Rightarrow R_0(t) = \exp[0] = 1$$

$$\Rightarrow R(t) = R_0(t) = \exp(-\lambda_0 \cdot t^{\beta_0})$$

Tir de  $z$  équiréparti entre 0 et 1 :  $z = \exp(-\lambda_0 \cdot \theta_0^{\beta_0})$

$$\text{soit } \lambda_0 \cdot \theta_0^{\beta_0} = -\ln(z)$$

$$\text{et instant de panne à partir de 0 : } \theta_0 = \left[ \frac{-\ln(z)}{\lambda_0} \right]^{\frac{1}{\beta_0}}$$

### 2. Intervalle 1

$\theta_0 \leq T_1$  : la panne survient à  $\theta_0 \Rightarrow$  fin de l'algorithme

$\theta_0 > T_1$  : l'instant de panne doit être réactualisé

$$T_1 : 1^{\text{er}} \text{ saut} \Rightarrow R(T_1) = \exp(-\lambda_0 \cdot T_1^{\beta_0})$$

$\Delta_1$  : âge au moment du saut (à calculer en fonction du cas considéré).

$$\rho_1 = \Delta_1 + t - T_1, \alpha_1 = \theta_1 - T_1 \text{ et } \omega_1 = \Delta_1 + T_2 - T_1$$

$$\Rightarrow R(t) = \frac{\exp(-\lambda_0 \cdot T_1^{\beta_0})}{\exp(-\lambda_1 \cdot \Delta_1^{\beta_1})} \cdot \exp(-\lambda_1 \cdot \rho_1^{\beta_1})$$

$$\text{D'où } z = \frac{\exp(-\lambda_0 \cdot T_1^{\beta_0})}{\exp(-\lambda_1 \cdot \Delta_1^{\beta_1})} \cdot \exp(-\lambda_1 \cdot \theta_1^{\beta_1})$$

$$\text{et } \ln\{z \cdot \frac{\exp(-\lambda_1 \cdot \Delta_1^{\beta_1})}{\exp(-\lambda_0 \cdot T_1^{\beta_0})}\} = -\lambda_1 \cdot \theta_1^{\beta_1}$$

Ce qui donne l'instant de panne réactualisé à partir de 0 :

$$\theta_1 = \left[ -\frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln\left\{ \frac{z \cdot \exp(-\lambda_1 \cdot \Delta_1^{\beta_1})}{\exp(-\lambda_0 \cdot T_1^{\beta_0})} \right\} \right]^{\frac{1}{\beta_1}}$$

etc.

### 3. Intervalle i quelconque

$\theta_{i-1} \leq T_i$  : la panne survient à  $\theta_{i-1} \Rightarrow$  fin de l'algorithme

$\theta_{i-1} > T_i$  : l'instant de panne doit être réactualisé

$T_i$  : i<sup>ème</sup> saut :

$$\Rightarrow R(T_i) = \frac{R(T_{i-1})}{\exp(-\lambda_{i-1} \cdot \Delta_{i-1}^{\beta_{i-1}})} \cdot \exp[-\lambda_{i-1} \cdot \omega_{i-1}^{\beta_{i-1}}]$$

$\Delta_i$  : âge au moment du saut (à calculer en fonction du cas considéré).

$$\rho_i = \Delta_i + t - T_i, \alpha_i = \theta_i - T_i \text{ et } \omega_i = \Delta_i + T_{i+1} - T_i$$

$$\Rightarrow R(t) = \frac{R(T_i)}{\exp(-\lambda_i \cdot \Delta_i^{\beta_i})} \cdot \exp(-\lambda_i \cdot \rho_i^{\beta_i})$$

$$\text{D'où } z = \frac{R(T_i)}{\exp(-\lambda_i \cdot \Delta_i^{\beta_i})} \cdot \exp(-\lambda_i \cdot \theta_i^{\beta_i})$$

$$\text{et } \ln\left\{ \frac{z \cdot \exp(-\lambda_i \cdot \Delta_i^{\beta_i})}{R(T_i)} \right\} = -\lambda_i \cdot \theta_i^{\beta_i}$$

Ce qui donne l'instant de panne réactualisé à partir de 0 :

$$\theta_i = \left[ -\frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln\left\{ \frac{z \cdot \exp(-\lambda_i \cdot \Delta_i^{\beta_i})}{R(T_i)} \right\} \right]^{\frac{1}{\beta_i}}$$

Nota : lorsqu'une loi exponentielle est à considérer dans un intervalle i, il suffit de faire  $\beta_i = 1$  et  $\Delta_i = 0$  pour cet intervalle.

## 6. Calcul des décalages en fonction des différents cas considérés

Pour pouvoir appliquer les développements ci-dessus, il reste à évaluer les décalages  $\Delta_i$  relatifs aux différents cas d'enchaînements décrits au début de cet article.

### 6.1 Cas général

Dans le cas général, les paramètres des lois de Weibull sont  $(\lambda_{i-1}, \beta_{i-1})$  pour l'intervalle (i-1) et  $(\lambda_i, \beta_i)$  pour l'intervalle i et il y a un saut  $St_i$  du taux de défaillance à l'instant  $T_i$  du changement de conditions.

La valeur du saut est une donnée d'entrée du modèle. Il en résulte :

$$\lambda_i \cdot \beta_i \cdot \Delta_i^{\beta_i-1} = St_i \cdot \lambda_{i-1} \cdot \beta_{i-1} \cdot \omega_{i-1}^{\beta_{i-1}-1}$$

$$\text{et } \Delta_i = \left[ \frac{St_i \cdot \lambda_{i-1} \cdot \beta_{i-1} \cdot \omega_{i-1}^{\beta_{i-1}-1}}{\lambda_i \cdot \beta_i} \right]^{\frac{1}{\beta_i-1}}$$

Cette formule est indéterminée dans le cas de la loi exponentielle ( $\beta_i = 1$ ) mais cela n'a pas d'importance car dans ce cas  $\Delta_i = 0$  à cause de l'absence de mémoire de cette loi.

### 6.2 Continuité du taux de défaillance

Ceci est un cas particulier du cas général avec  $St_i = 1$

$$\text{d'où } \Delta_i = \left[ \frac{\lambda_{i-1} \cdot \beta_{i-1} \cdot \omega_{i-1}^{\beta_{i-1}-1}}{\lambda_i \cdot \beta_i} \right]^{\frac{1}{\beta_i-1}}$$

Ce cas existe dans le cas de l'enchaînement d'une loi exponentielle avec une loi de Weibull ou d'une loi de Weibull avec une loi exponentielle mais n'existe pas dans le cas de l'enchaînement de deux lois exponentielles.

### 6.3 Continuité temporelle

Dans l'hypothèse de la continuité temporelle,  $\Delta_i$  est une donnée d'entrée car  $\Delta_i = T_i$ .

La formule générale donne :

$$\lambda_i \cdot \beta_i \cdot T_i^{\beta_i-1} = St_i \cdot \lambda_{i-1} \cdot \beta_{i-1} \cdot \omega_{i-1}^{\beta_{i-1}-1}$$

Et il en résulte un saut à l'instant d'un changement de conditions égal à :

$$St_i = \frac{\lambda_i \cdot \beta_i \cdot T_i^{\beta_i-1}}{\lambda_{i-1} \cdot \beta_{i-1} \cdot \omega_{i-1}^{\beta_{i-1}-1}}$$

Ce cas se rattache donc au cas général avec  $\Delta_i = T_i$  et  $St_i$  calculé avec la formule précédente.

Si la continuité temporelle s'applique à tous les enchaînements, alors  $\omega_i = T_i$  quel que soit i et le saut est

$$\text{égal à : } St_i = \frac{\lambda_i \cdot \beta_i \cdot T_i^{\beta_i-1}}{\lambda_{i-1} \cdot \beta_{i-1} \cdot T_i^{\beta_{i-1}-1}} = \frac{\lambda_i \cdot \beta_i}{\lambda_{i-1} \cdot \beta_{i-1}} T_i^{\beta_i - \beta_{i-1}}$$

### 6.4 Enchaînement avec vieillissement

Dans ce modèle, une loi de Weibull de paramètres  $(\lambda_0, \beta_0)$  est utilisée comme référence et des lois de Weibull de paramètres  $(\lambda_0 \cdot v_i^{\beta_0-1}, \beta_0)$  dans les intervalles où la vitesse de vieillissement est multipliée par  $v_i$ .

On retrouve donc le cas développé pour la continuité du taux de défaillance mais avec des paramètres

$$\lambda_i = \lambda_0 \cdot v_i^{\beta_0-1} \text{ et } \beta_i = \beta_0$$



## 6.5 Continuité probabiliste

Dans ce cas, on fait l'hypothèse  $R_{i-1}(\omega_{i-1}) = R_i(\Delta_i)$  où  $R_i(t)$  est la fiabilité relative à la loi dans l'intervalle  $i$ .

Appliqué à la loi de Weibull, cela donne :

$$\exp(-\lambda_{i-1} \cdot \omega_{i-1}^{\beta_{i-1}}) = \exp(-\lambda_i \Delta_i^{\beta_i})$$

Il en résulte :  $\lambda_{i-1} \cdot \omega_{i-1}^{\beta_{i-1}} = \lambda_i \Delta_i^{\beta_i}$

$$\text{d'où : } \Delta_i = \left[ \frac{\lambda_{i-1} \cdot \omega_{i-1}^{\beta_{i-1}}}{\lambda_i} \right]^{\frac{1}{\beta_i}}$$

$$\text{D'autre part } \lambda(T_i^-) = \lambda_{i-1} \cdot \beta_{i-1} \cdot \omega_{i-1}^{\beta_{i-1}-1}$$

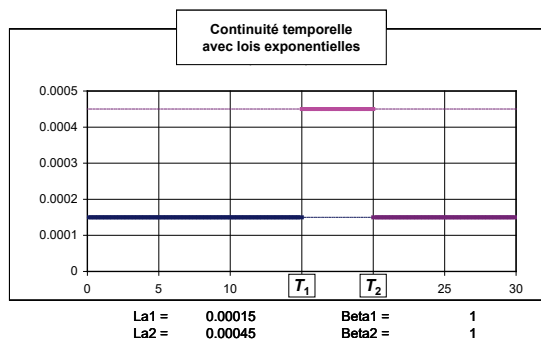
$$\text{et } \lambda(T_i^+) = \lambda_i \cdot \beta_i \cdot \Delta_i^{\beta_i-1}$$

Il en résulte un saut du taux de défaillance égal à :

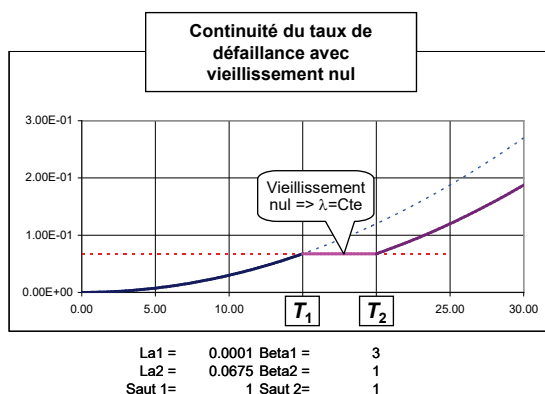
$$St_i = \frac{\lambda_i \cdot \beta_i \cdot \Delta_i^{\beta_i-1}}{\lambda_{i-1} \cdot \beta_{i-1} \cdot \omega_{i-1}^{\beta_{i-1}-1}}$$

## 7. Exemples d'application

Des exemples typiques ont déjà été fournis ci-dessus pour illustrer les différentes approches. Les exemples ci-dessous viennent les compléter.



La Figure 14 représente le cas le plus classique où des lois exponentielles sont mises en œuvre. Ici le taux de défaillance est multiplié par 3 dans l'intervalle  $[T_1, T_2]$  et ce modèle peut être utilisé pour l'exemple de la petite photocopieuse analysé auparavant avec l'approche de la modification du vieillissement.



La Figure 15 illustre un cas où le taux de défaillance devient constant pendant l'intervalle  $[T_1, T_2]$ . Il cesse donc de vieillir pendant cet intervalle et cela peut modéliser une situation où les conditions d'utilisation deviennent plus clémentes pour le composant pendant  $[T_1, T_2]$ . Cela correspond, par exemple, au passage en attente à chaud (*hot stand-by*) du composant en question.

La Figure 16 illustre un premier cas d'un enchaînement loi de Weibull / loi exponentielle. Un saut a été modélisé à l'instant  $T_1$  et la continuité du taux de défaillance a été modélisée au temps  $T_2$ .

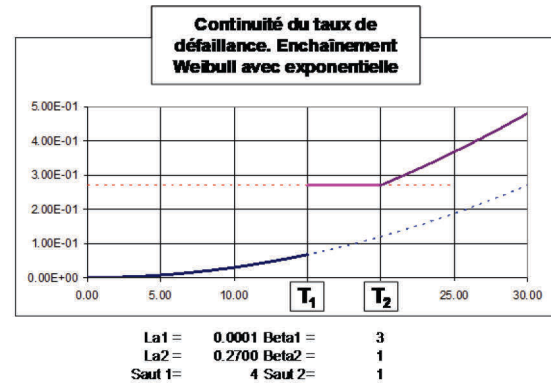


Figure 16 : Enchaînement Weibull-exponentielle, type 1.

Figure 17 illustre un deuxième cas d'un enchaînement loi de Weibull / loi exponentielle. La continuité du taux de défaillance a été modélisée au temps  $T_1$  et un saut a été modélisé à l'instant  $T_2$ .

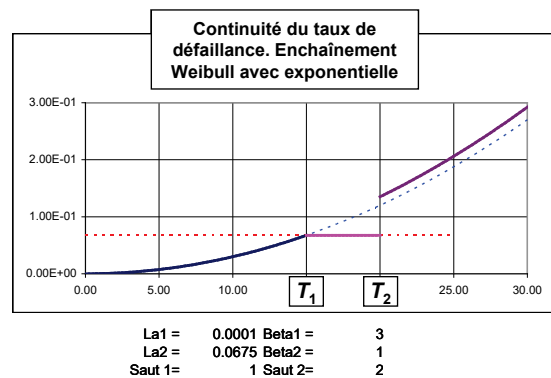


Figure 17 : Enchaînement Weibull-exponentielle, type 2.

La Figure 18 illustre un troisième cas d'un enchaînement loi de Weibull / loi exponentielle. Un saut a été modélisé à chacun des instants  $T_1$  et  $T_2$ .

Ces trois cas correspondent à des cas où le composant subit des chocs à  $T_1$  (Figure 16), à  $T_2$  (Figure 17) ou à  $T_1$  et  $T_2$  (Figure 18) mais ne vieillit plus (ne s'use plus) entre  $T_1$  et  $T_2$ .

Cela peut paraître un peu théorique mais ce ne l'est pas plus, en fait, que les approches par *continuité temporelle* ou *continuité probabiliste* qui ont servi de point de départ à cet article.

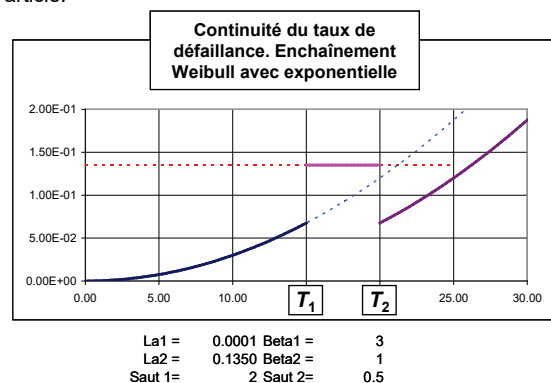


Figure 18 : Enchaînement Weibull-exponentielle, type 3.

La Figure 19 représente le comportement du taux de défaillance d'un composant dont l'occurrence de la panne est *suspendue* pendant l'intervalle  $[T_1, T_2]$ . Cela modélise, par exemple, la mise en attente froide (*cold stand-by*) du composant pendant l'intervalle  $[T_1, T_2]$ . Il s'agit d'un cas particulier de celui exposé sur la Figure 18.

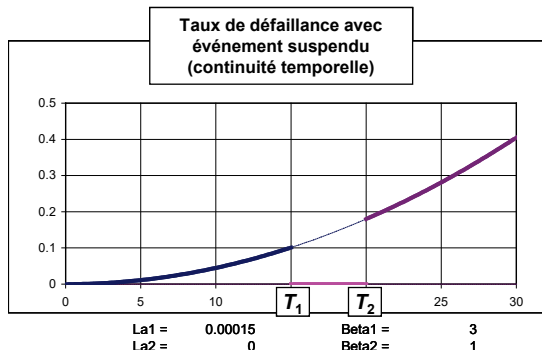


Figure 19 : Taux de défaillance en cas d'événement suspendu.

Le comportement de la fonction de répartition correspondante est différent de celui observé pour les cas précédemment analysés. Dans ce cas, la fonction de répartition reste constante entre  $T_1$  et  $T_2$ , comme cela a été représenté sur la Figure 20. Il en résulte que, pour la Figure 13, l'instant réactualisé  $\theta$  de la défaillance est rejeté à l'infini pendant tout l'intervalle  $[T_1, T_2]$ . Cela entraîne des problèmes numériques nécessitant un traitement spécifique :  $\theta_{i+1} = \theta_{i-1}$ .

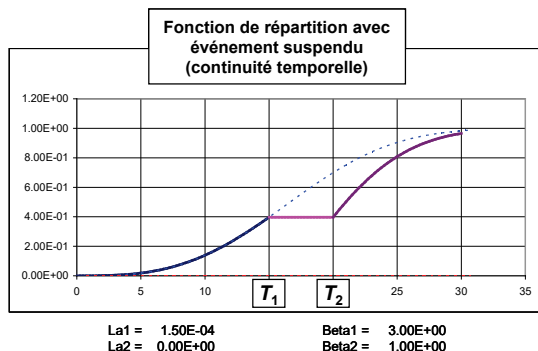


Figure 20 : Fonction de répartition en cas d'événement suspendu.

Pour terminer, deux cas spécifiques sont proposés :

- *continuité du taux de défaillance* lorsque les lois de Weibull ont des facteurs de forme  $\beta$  inférieurs à 1 ;
- *continuité du taux de défaillance* lorsque les lois de Weibull ont des facteurs de forme  $\beta$  égaux à 2.

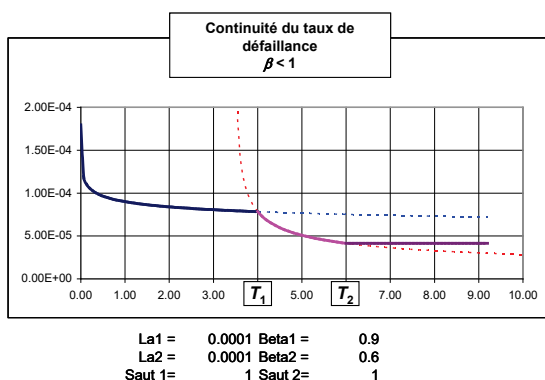


Figure 21 : Continuité du taux de défaillance avec des facteurs  $\beta$  inférieurs à 1.

La Figure 21 correspond à un composant en cours de déverminage avec un déverminage plus énergique dans l'intervalle  $[T_1, T_2]$ . Pour la Figure 22, les taux de défaillance augmentent linéairement avec le temps, ce qui est la caractéristique des lois de Weibull avec  $\beta=2$ .

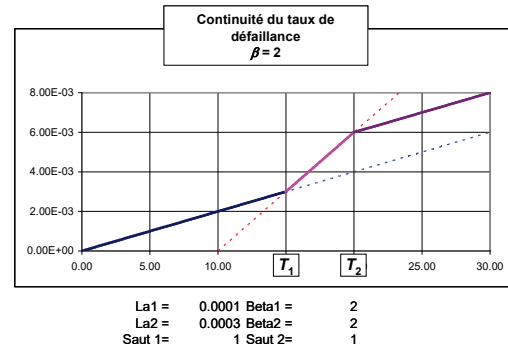


Figure 22 : Continuité du taux de défaillance avec des facteurs  $\beta$  égaux à 2.

## 8. Conclusions

Les approches classiques de *continuité temporelle* et de *continuité probabiliste* couramment utilisées pour modéliser des transitions dynamiques peuvent facilement être prolongées et unifiées par une approche unique qui englobe aussi la *continuité du taux de défaillance* à l'instant de changement de conditions d'utilisation du composant concerné.

Cette approche propose aussi de modéliser l'augmentation / diminution de la vitesse de vieillissement due aux changements de condition d'utilisation ainsi que les chocs (non létaux) dus à des changements brutaux desdites conditions d'utilisation.

Le modèle proposé est général mais a été développé ici dans le cadre des lois de Weibull qui sont couramment utilisées pour modéliser les probabilités de défaillance de composants et facilitent les développements mathématiques. Elles permettent aussi de traiter le cas des lois exponentielles classiques.

Dans tous les cas, la fonction de répartition est continue, ce qui démontre que la *continuité probabiliste* n'est pas un cas particulier mais plutôt le cas général qui englobe toutes les approches envisagées.

Utilisées dans le cadre de la simulation de Monte Carlo, les fonctions de répartition ainsi obtenues permettent de réactualiser de proche en proche l'instant d'occurrence de l'événement modélisé lorsque les conditions changent avant qu'il ne se soit effectivement produit.

Cet article prolonge celui présenté au congrès Lambda Mu 20 (Dutuit Y. et al., 2016) dont les références restent utilisées et ont été rappelées ci-dessous.

## 9. Références

Dutuit Y, Signoret J-P, Thomas P (2016). *Prise en compte des transitions dynamiques au sein des réseaux de Petri stochastiques*. Proceedings congrès LM20.

Labeau P.E., Zio E. (2000). *The mathematics of component-based and system-based Monte Carlo sampling in realistic system engineering*, Proceedings of MMR'2000 2, 667-670.

Labeau P.E. (2001). *Modification des lois de probabilité décrivant les temps de défaillance et de réparation d'un*



*composant en fonction de contraintes externes. Application à la simulation de Monte-Carlo*, Note personnelle

Labeau P.E., Zio E. (2002). *Procedures of Monte Carlo transport simulation for applications in system engineering*. Reliability Engineering and System Safety, 77, 217-228.

Labeau P.E. (2006). *Distribution du temps résiduel d'occurrence d'un événement*, Note personnelle.

Signoret J.P. (1995). *Simulation d'une maintenance imparfaite - Loi de Weibull tronquée*. Rapport DSE/SES ARF 95063.

Signoret J.P. (1997). *Simulation de Monte Carlo de composants dont le taux de défaillance change en fonction de contraintes externes*, Etude de faisabilité. - Rapport EP/P/SE MRT ARF JPS 97117

Signoret J.P., Dutuit Y., Cacheux P.J., Folleau C., Collas S., Thomas P. (2013). *Make your Petri nets understandable: Reliability block diagrams driven Petri nets*, Reliability Engineering and System Safety, 113, 61-75